

Επιπλέον, $f_n \xrightarrow{u.p.} f$ και $\{f_n: n \in \mathbb{N}\}$ ισοσυνεχές από προηγ. πρόταση f συνεχής

$$\begin{aligned} \text{Αρα, } |f_n(y) - f(y)| &\leq |f_n(y) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| \\ &\leq |f_n(y) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

Οπότε $f_n \rightarrow f$

17-1-17

Εφαρμογές στη τελευταία Πρόταση

Ασκ

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$, $x \in [1, 5]$
Να εξεταστεί η ομ. σύγκλιση

Λύση

f_n συνεχής στο $[1, 5]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης, $A = [1, 5]$ απορροφεί $\mathbb{R}$.
Έχουμε $\forall n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 5)$ και
 $f'_n(x) = -\frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$

$$\text{Επίσης, } \forall x \in [1, 5]: |f'_n(x)| = \frac{1}{n^2} \frac{1}{e^{\frac{x}{n}}} \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{e^{1/n}} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

Από το Θ.Μ.Τ: $\forall x, y \in [1, 5]$

$$\text{υπάρχει } \xi_{xy}: |f_n(x) - f_n(y)| = |f'_n(\xi_{xy})| |x - y| \leq \frac{1}{n} |x - y|$$

$$\text{Αρα, } (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0): |x - y| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Αρα $\{f_n: n \in \mathbb{N}\}$ ισοσυνεχές.

Αλλά, $\forall x \in [1, 5]$:

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \rightarrow 0, \text{ οπότε αν } f(x) = 0, x \in [1, 5]$$

Τότε $f_n \rightarrow f$.

Θεώρημα (Arzela-Ascoli)

Έστω A συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $H \subseteq C(A, \mathbb{R})$. Το H είναι συμπαγές ανν το H είναι κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές.

Απόδειξη

⊆ Μόνο αυτή η συνεπαγωγή

H ως συμπαγές $\subseteq C(A, \mathbb{R}) \Rightarrow H$ κλειστό και φραγμένο.

Θ.δ.ό είναι ισοσυνεχές, δηλαδή

$$(\forall x \in A) (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall y \in A) : \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall f \in H$$

Έστω ότι δεν ισχύει, τότε:

$$(\exists x \in A) (\exists \epsilon > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) (\exists y_n \in A) (\exists f_n \in H) : \|x - y_n\| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y_n)| \geq \epsilon$$

$(f_n) \subseteq H$ συμπαγές $\Rightarrow \exists$ συχθίνουσα υποακολουθία (f_{k_n}) και

έστω $f_{k_n} \xrightarrow{p.u.} f$. Εφόσον (f_{k_n}) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f_{k_n} \rightarrow f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow f \in C(A, \mathbb{R})$

Επειδή $\|x - y_n\| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow y_n \rightarrow x$. Οπότε,

$$f_{k_n}(y_{k_n}) \rightarrow f(x). \text{ Επίσης, αφού } f_{k_n} \xrightarrow{p.u.} f \Rightarrow f_{k_n}(x) \xrightarrow{p.u.} f(x)$$

$$\text{Αρα, } \epsilon \leq |f_{k_n}(x) - f_{k_n}(y_{k_n})| \leq |f_{k_n}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{k_n}(y_{k_n})| \rightarrow 0 \Rightarrow \epsilon = 0. \text{ Άρα, το!}$$

Ασκ

Να εξετάσετε αν το $H = \{ f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(0, 0) = 0 \text{ και } |f(x, y) - f(x', y')| \leq |x - x'| + |y - y'| \}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $(C([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{R}), p_u)$

Λύση

Αρκεί ν.δ.ό H κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές.

• Ισοσυνεχές

Αρκεί ν.δ.ό αν $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] = A$, τότε:

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall (x', y') \in A) : \|(x, y) - (x', y')\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon, \forall f \in H$$

$$\text{Όμως, } |f(x, y) - f(x', y')| \leq |x - x'| + |y - y'| \leq$$

$$\leq \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} + \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = 2 \|(x, y) - (x', y')\| < \epsilon, \text{ αν πάρω } \delta = \frac{\epsilon}{2}$$

Φραγμένο

$$\text{Εάν } (x,y) \in A: |f(x,y)| = |f(x,y) - f(0,0)| \leq |x| + |y| \leq 2$$

Αρα, $\sup_{(x,y) \in A} |f(x,y)| \leq 2 \Rightarrow H$ φραγμένο

Κλειστό

Έστω $(f_n) \in H$ και $f_n \xrightarrow{p_u} f$. Ν.δ.ό $f \in H$

$f_n \rightarrow f$ οπ/ρα, $(f_n) \in C(A, \mathbb{R}) \Rightarrow f \in C(A, \mathbb{R})$

Επιπλέον, $f_n(0,0) \rightarrow f(0,0) \Rightarrow f(0,0) = 0$

Ακόμα, $|f(x,y) - f(x',y')| \leq |f(x,y) - f_n(x,y)| + |f_n(x,y) - f_n(x',y')| + |f_n(x',y') - f(x',y')|$
αλλά $f_n \xrightarrow{p_u} f \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n > n_0): |f_n(x,y) - f(x,y)| < \varepsilon, \forall (x,y) \in A$

Από ① για $n = n_0$

$$|f(x,y) - f(x',y')| \leq 2\varepsilon + |f_{n_0}(x,y) - f_{n_0}(x',y')| \leq 2\varepsilon + |x - x'| + |y - y'|$$

$$\text{Για } \varepsilon \rightarrow 0: |f(x,y) - f(x',y')| \leq |x - x'| + |y - y'|$$

Αρα, $f \in H$.

Ασκ

Έστω A φραγμένο $\in (C([a,b], \mathbb{R}), p_u)$. Ν.δ.ό το σύνολο των ανάρμοστων της μορφής: $F(x) = \int_a^x f(u) du$, $f \in A$ είναι ισοσυνεχές οικογένεια

Λύση

A φραγμένο $\in (C([a,b], \mathbb{R}), p_u)$. $\exists M > 0: \|f\| \leq M, \forall f \in A$
 $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq M$

$$\forall x,y \in [a,b]: |F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(u) du - \int_a^y f(u) du \right| = \left| \int_y^x f(u) du \right| \leq M|x-y|$$

Συνεπώς: $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \stackrel{\varepsilon/M}{:} |x-y| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leq M|x-y| \leq \varepsilon, \forall$

Αρα, το $H = \{ F: F(x) = \int_a^x f(u) du, f \in A \}$ είναι ισοσυνεχές.

Ασκ

Για $K > 0$, έστω $Lip_K(A)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων Lipschitz με σταθερά K στο A , δηλαδή:
 $f \in Lip_K(A)$ αν $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$, $\forall x, y \in A$. Αν A υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $\forall \delta > 0$ $\forall x \in A$ το σύνολο $H = \{f \in Lip_K(A) : f(x) \in \bar{I}\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $C(A, \mathbb{R})$

Λύση

Αφού I φραγμένο $\Rightarrow \bar{I}$ φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}$

Επίσης A συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$.

$$H \subseteq Lip_K(A)$$

① Αφού $\forall f \in Lip_K(A)$ είναι ομο. συνεχής, θα είναι και συνεχής.
Άρα $H \subseteq C(A, \mathbb{R})$

Οπότε, από Θεώρημα Arzela-Ascoli, αρκεί ν.δ.ο:
1. Η κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές
• φραγμένο

$$\text{Έστω } f \in H \Rightarrow \forall x \in A, \text{ αν } a \in A: |f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq K|x - a| + |f(a)| \Rightarrow |f(x)| \leq K \cdot M + M = M'$$

Αφού A συμπαγές και $f(a) \in \bar{I}$ φραγμένο

Οπότε, $\sup_{x \in A} |f(x)| \leq M' \Rightarrow H$ φραγμένο.

• Ισοσυνεχές

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta = \frac{\epsilon}{K}) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < \epsilon.$$

• Κλειστό

$$\text{Έστω } f_n \xrightarrow{p_u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{p_u} f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n > n_0) |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in A.$$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \leq \epsilon + K|x - y| \rightarrow K|x - y|$$

Μένει ν.δ.ο $f(a) \in \bar{I}$

$$\text{Έχω } f_n(a) \in \bar{I} \Rightarrow \lim f_n(a) \in \bar{I} \Rightarrow f(a) \in \bar{I}$$

Παρατηρήσεις

- 1) Έστω (E, ρ) , $S \subseteq E$, τότε $y \in \bar{S} \Leftrightarrow \exists (x_n) \in S, \lim x_n = y$
- 2) Εάν S φραγμένο υποσύνολο ενός $\rho.x (E, \rho) \Rightarrow \bar{S}$ φραγμένο
- 3) Αν A συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $H \in C(A, \mathbb{R})$ ισοσυνεχές $\Rightarrow \bar{H} \subseteq C(A, \mathbb{R})$ ισοσυνεχές.

Λόγω των παρατηρήσεων έχουμε τις εξής παρατηρήσεις του θεωρήματος Arzela-Ascoli:

- α) Αν $H \in C(A, \mathbb{R})$, H φραγμένο και ισοσυνεχές $\Rightarrow H$ σχετική συμπαγές (δηλαδή $\bar{H}$ συμπαγές).
- β) Κάθε φραγμένη και ισοσυνεχής ακολουθία στον $C(A, \mathbb{R})$ έχει μια σχετική υποακολουθία.
ομοιόμορφα

Η ισοσυνεχής συνάρτηση

- $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και $f \in F(A, \mathbb{R})$. Έστω $y \in A$ τότε λέμε ότι f είναι συνεχής στο y αν
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A): |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(y) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(y) + \varepsilon$
- Δηλαδή, f συνεχής στο y αν ισχύουν ταυτόχρονα τα παρακάτω
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A): |x - y| < \delta \Rightarrow f(y) - \varepsilon \leq f(x)$
 $" " " " " \Rightarrow f(x) \leq f(y) + \varepsilon$ (*)

Πρόταση (έχουμε δει)

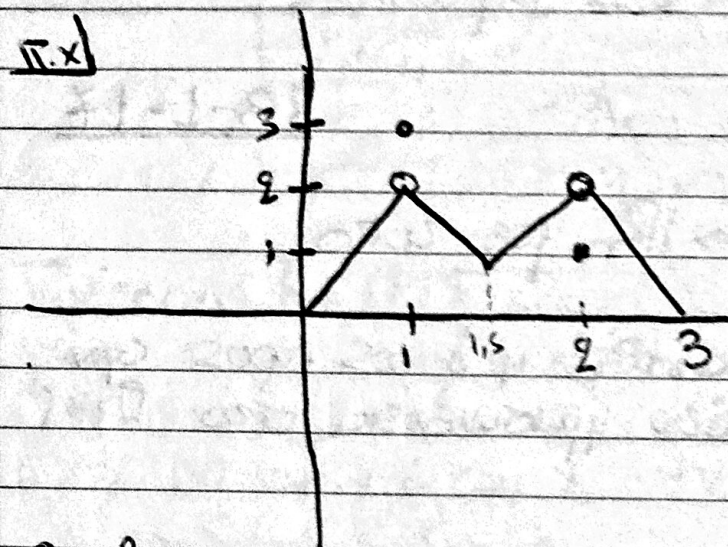
Αν $\rho \in \mathbb{R}$ και $y \in A''$, τότε ισχύει:

- i) $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq \rho \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq \rho + \varepsilon$
- ii) $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq \rho \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \geq \rho - \varepsilon$

Apo, $(*) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \liminf_{x \rightarrow y} f(x) > f(y) \\ \text{και} \\ \limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq f(y) \end{array} \right.$

Ορισμός: Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι f είναι κάτω ημι-συνεχής στο $y \in A$ αν ισχύει: $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq f(y)$

Ενώ θα λέμε ότι f είναι άνω ημι-συνεχής στο $y \in A$ αν: $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq f(y)$



Αυτή είναι συνεχής στο $[0,1) \cup (1,2) \cup (2,3] \Rightarrow$ Είναι άνω και κάτω ημι-συνεχής $\forall x_0 \in [0,1) \cup (1,2) \cup (2,3]$

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \liminf_{x \rightarrow 2} f(x) > f(2) \Rightarrow \\ \Rightarrow f \text{ κάτω ημι-συνεχής στο } 2 \end{array} \right. \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2, \quad f(2) = 1 \end{array}$$

$$\limsup_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow 1} f(x) \leq f(1) \\ f(1) = 3 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Άρα f άνω ημι-συνεχής στο 1.

π.α Έστω $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ Να ελεγχθεί η υπισυνέχεια

Λύση

$\forall y \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf \{ f(x) : x \in (y-\delta, y+\delta) \} = 0$

$\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup \{ f(x) : x \in (y-\delta, y+\delta) \} = 1$

Η f είναι κατω υπισυνεχής στο y αν $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq f(y)$
Αρα f κατω υπισυνεχής στους άρρητους και
αντίστροφα άνω υπισυνεχής στους ρητούς.

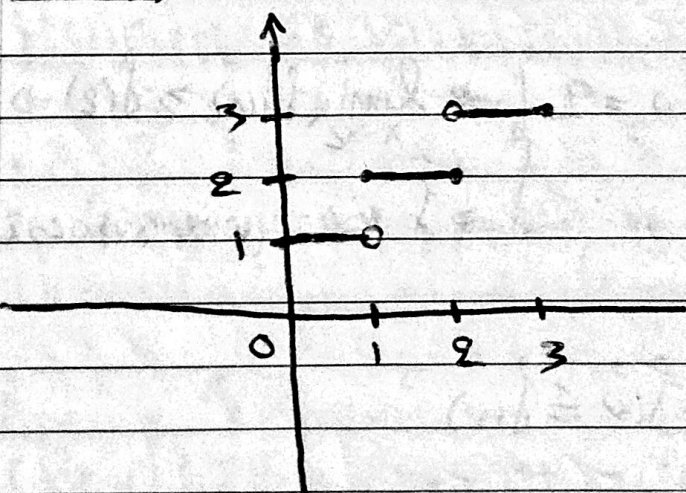
18-1-17

Άσκ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, με τρόπο

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 2, & x \in [1, 2] \\ 3, & x \in (2, 3] \end{cases}$. Να ελεγχθεί η f ως προς την
άνω και κατω υπισυνέχεια στο $[0, 3]$

Λύση



$$\liminf_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$f(1) = 2$$

$$\limsup_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow 1} f(x) \leq f(1)$$

$$f(1) = 2$$

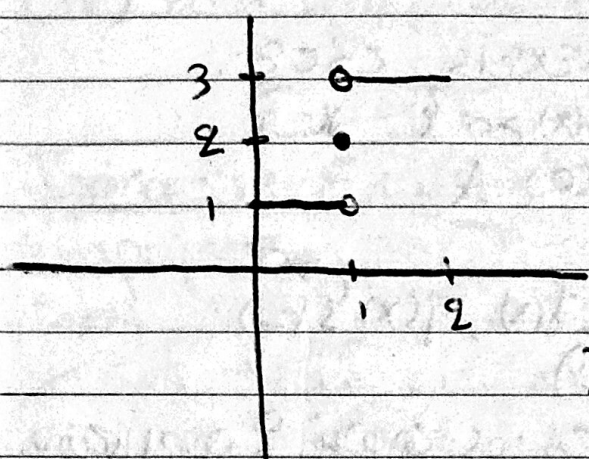
Αρα άνω υπισυνεχής
στο 1

$\liminf_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \geq 2 = f(2)$. Αρα κατω υπισυνεχής στο 2.

Ασκ

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x \in (1, 2] \end{cases} \quad \text{Το ίδιο ερώτημα}$$

Λύση



$$\liminf_{x \rightarrow 1} f(x) = 1, \quad \limsup_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$f(1) = 2$$

$$\text{Άρα, } \liminf_{x \rightarrow 1} f(x) < f(1) < \limsup_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Άρα, δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω
υπέρσυνεχης.

Πρόταση: Αν $f: X \rightarrow Y$, X, Y τοπολογικοί χώροι, τα εφό-
φωνα είναι ισοδύναμα:

- i) f συνεχής στον X
- ii) $f^{-1}(V)$ ανοιχτό του $X \quad \forall V$ ανοικτό του Y

Πρόταση: Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ τότε

- i) f κάτω υπέρσυνεχης $\Leftrightarrow$ το σύνολο $K_f(\sigma) = \{x \in A : f(x) \geq \sigma\} = f^{-1}([\sigma, +\infty))$ είναι ανοιχτό στο A , $\forall \sigma \in \mathbb{R}$
- ii) f άνω υπέρσυνεχης $\Leftrightarrow$ το $A_f(\sigma) = \{x \in A : f(x) \leq \sigma\} = f^{-1}((-\infty, \sigma])$ είναι ανοιχτό στο A , $\forall \sigma \in \mathbb{R}$.

Υπερθέματα

- Αν $\{A_i : i \in I\}$ οικογένεια ανοικτών συνόλων $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ ανοιχτό
- Αν $A_1, \dots, A_k$ ανοικτά στον $X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^k A_i$ ανοιχτό στον X .

Πρόταση: Αν $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ και f, g κάθε δύο ημισυνεχείς τότε και οι συναρτήσεις $f \wedge g, f \vee g, f + g, \alpha f, \alpha > 0$ είναι κάθε ημισυνεχής όπου:

$$\begin{cases} f \wedge g(x) = \min \{ f(x), g(x) \}, x \in A \\ f \vee g(x) = \max \{ f(x), g(x) \}, x \in A \end{cases}$$

Απόδειξη

Έστω $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ κάθε δύο ημισυνεχείς, τότε $\forall \sigma \in \mathbb{R}$ τα σύνολα: $K_f(\sigma) = \{ x \in A: f(x) > \sigma \}$ και $K_g(\sigma) = \{ x \in A: g(x) > \sigma \}$ είναι ανοικτά του A

• $x \in K_{f \wedge g}(\sigma) \Leftrightarrow (f \wedge g)(x) > \sigma \Leftrightarrow \min \{ f(x), g(x) \} > \sigma \Leftrightarrow f(x) > \sigma \wedge g(x) > \sigma \Leftrightarrow x \in K_f(\sigma) \cap K_g(\sigma)$

Άρα, $K_{f \wedge g}(\sigma) = K_f(\sigma) \cap K_g(\sigma)$ ανοικτό ως τομή 2 ανοικτών.

• $x \in K_{f \vee g}(\sigma) \Leftrightarrow (f \vee g)(x) > \sigma \Leftrightarrow \max \{ f(x), g(x) \} > \sigma \Leftrightarrow f(x) > \sigma \vee g(x) > \sigma \Leftrightarrow x \in K_f(\sigma) \cup K_g(\sigma)$

Άρα, $K_{f \vee g}(\sigma) = K_f(\sigma) \cup K_g(\sigma)$ ανοικτό ως ένωση 2 ανοικτών

• $x \in K_{f+g}(\sigma) \Leftrightarrow (f+g)(x) > \sigma \Leftrightarrow f(x) + g(x) > \sigma \Leftrightarrow f(x) > \sigma - g(x)$

$\exists r \in \mathbb{Q}: f(x) > r$ και $r > \sigma - g(x) \Leftrightarrow$

$f(x) > r$ και $g(x) > \sigma - r$

Οπότε $x \in K_f(r)$ και $x \in K_g(\sigma - r) \Leftrightarrow x \in K_f(r) \cap K_g(\sigma - r)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} K_f(r) \cap K_g(\sigma - r)$

Αντίστροφα, $K_{f+g}(\sigma) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} K_f(r) \cap K_g(\sigma - r)$ ανοικτό ως αριθμοποιημένη ένωση ανοικτών.

• Αν $\alpha > 0$:

$x \in K_{\alpha f}(\sigma) \Leftrightarrow \alpha f(x) > \sigma \Leftrightarrow f(x) > \frac{\sigma}{\alpha} \Leftrightarrow x \in K_f(\sigma/\alpha)$

Οπότε $K_{\alpha f}(\sigma) = K_f(\sigma/\alpha)$ που είναι ανοικτό

Πρόταση: i) Αν (f_n) αύξουσα και φραγμένη ακολουθία κ.ω. υ.σ. συνεχών συναρτήσεων, τότε και το κατά σημείο όριο της (f_n) είναι κ.ω. υ.σ. συνεχές.

ii) Αν (f_n) φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία άνω υ.σ. συνεχών συναρτήσεων, τότε και το κατά σημείο όριο της (f_n) είναι άνω υ.σ. συνεχές.

Πρόταση: Έστω (f_n) μια ακολουθία κ.ω. υ.σ. συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα προς κάποια συνάρτηση $f \in C(A, \mathbb{R})$, τότε η f είναι κ.ω. υ.σ. συνεχής (άνω).

Πρόταση (Dini): Αν A συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$ και (f_n) μονότονη ακολουθία στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C(A, \mathbb{R})$ ώστε: $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f, \forall f \in C(A, \mathbb{R})$
 τότε ισχύει: $f_n \rightarrow f$ ομο/φα.

Πρόταση: Έστω A συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}$ και (f_n) ακολουθία συναρτήσεων του $C(A, \mathbb{R})$ η οποία συγκλίνει προς μια συνεχή f . Τότε η σύγκλιση θα είναι ομοιόμορφη αν ισχύει τουλάχιστον ένα από τα εξής:

i) (f_n) αύξουσα και κάθε μια από τις (f_n) είναι κ.ω. υ.σ. συνεχής

ii) (f_n) φθίνουσα και κάθε μια από τις (f_n) είναι άνω υ.σ. συνεχής.

Υπενθύμιση

- $f: X \rightarrow Y$ συνεχής, X, Y τοπολογικοί χώροι και A συμπαγές του X τότε $f(A)$ συμπαγές του Y
- Αν $A \subseteq (E, \rho) \Rightarrow A$ κλειστό και φραγμένο A συμπαγές

Πρόταση: Αν A συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}$, τότε κάθε ^(άνω) κάτω υφιστάμενη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ^(άνω) κάτω γραμμική και υπάρχει $y \in A$ ώστε $f(y) = \inf \{ f(x) : x \in A \}$ $(= \sup \{ f(x) : x \in A \})$

Απόδειξη

Έστω A συμπαγές και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ κάτω υφιστάμενη.

Έστω $b = \inf \{ f(x) : x \in A \}$

Θ.δ.ό $b \in \mathbb{R}$ και $\exists y \in A: f(y) = b$

$b = \inf \{ f(x) : x \in A \} \Rightarrow \exists (x_n) \subseteq A: \lim f(x_n) = b$ ●

$(x_n) \subseteq A$, A συμπαγές $\Rightarrow \exists (z_n)$ υποκολουθία της (x_n) με $\lim z_n = y \in A$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) (z_n) είναι τελικά σταθερή $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: z_n = y, \forall n \geq n_0$
Αρα, $b = \lim f(x_n) = \lim f(z_n) = f(y) \Rightarrow f(y) = b$

β) (z_n) όχι τελικά σταθερή $\Rightarrow \exists$ υποκολουθία (w_n) της (z_n) με όρους διαφορετικούς του y . Επιπλέον,
 $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \lim f(w_n)$

Οπότε, $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \lim f(w_n) = \lim f(x_n) = b$ ①

Επιπλέον, y f είναι κάτω υφιστάμενη $\Rightarrow f(y) \leq \liminf_{x \rightarrow y} f(x)$
 $\Rightarrow b \leq \liminf_{x \rightarrow y} f(x)$ ②

Από ①, ②: $f(y) = b$.